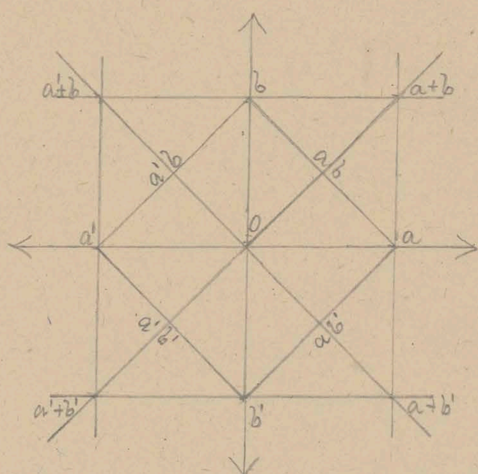
BENEDYKT BORNSTEIN

## Sur la géométrie algébrique catégorielle

Nous traçons dans le plan deux axes de coordonnées perpendiculaires entre eux et partageons ainsi le plan en 4 quarts. Maintenant nous posons la question: quels genres fondamentaux,quelles catégories des points et des droites sont possibles dans le plan? quels sont les points et les droites situés 1/ dans un (seulement) quart,2/ dans deux quarts,3/ dans trois,4/ dans tous les quatre quarts et 5/ au-delà des quarts du plan (les éléments "impropres" à l'infini). La réponse sur cette question nous donnera les catégories possibles des points et des droites dans le plan. Nous les voyons toutes (à l'exception des éléments "impropres") sur le diagramme au-dessous,abstraction faite pour le moment de dénominations algébriques que nous trouvons là.




Ce diagramme représente ainsi le plan géométrique avec tous ses éléments,mais pas le plan ordinaire avec une multiplicité illimitée d'éléments;c'est le plan géométrique catégoriel,ou chaque genre d'éléments n'est présenté que par un élément,par une catégorie géométrique, une qualité géométrique différente,p.ex. le point dans le premier quart, la droite parallèle à l'axe vertical et situé à droite de lui etc. Nous avons donc ici les éléments de la géométrie complètement qualitative qui n'opère pas avec les notions de la grandeur et de la distance et qui ne s'intéresse que de la position resp. de la direction des éléments; nous nous trouvons ici dans le domaine de la géométrie projective (géométrie de position). Ici ces éléments qualitatifs sont présentés sous la forme des types,des catégories et forment ainsi les éléments de la géométrie catégorielle de position.

Maintenant se pose la question d'introduire ici l'algorythme qui

permet de découvrir et représenter symboliquement les relations qui existent entre les catégories géométriques. Si nous reuissons dans ce problème,nous serons en possession d'algorythme des points catégoriels (des posistions) et des droites catégorielles (des directions).

Dans ce but nous revenons à notre diagramme qui représente un système d'éléments de la géométrie catégorielle en le prenant pour le moment sans ses dénominations algébriques. Maintenant nous désignons le point situé sur l'axe horizontal à droite du centre des coordonnées par le symbole a,le point du côté opposé du centre sur le même axe par le symbole a' (la négation d'a); le point situé sur l'axe vertical au dessus du centre des coordonnées par b,le point opposé - par b' (la négation de b). Pour désigner les deux opérations fondamentales de la géométrie projective,la section et la projection (la jonction) nous introduisons les symboles + et x. La jonction de deux points a et b donne la droite a x b (ab) et duellement l'intersection de deux droites a et b(perpendiculaires entre elles) donne le point a + b. Nous désignerons donc la droite joignant les points a et a' , c'est à dire l'axe horizontal par aa' et pareillement l'axe vertical par bb'. Ces axes de coordonnées nous prenons pour les modules d'intersection et désignons par le symbole 0,alors aa'= 0 et bb'= 0. Donc a + aa'= a + 0 = a; et cela signifie que la droite qui est perpendiculaire à l'axe horizontal (0) et donne avec lui le point d'intersection a est elle même la droite a. C'est ainsi que les côtés du carré extérieur se présentent comme a,b,a',b' et la désignation d'éléments ultérieurs ne présente plus aucune difficulté[1].(L'élément géométrique duel à l'égard de 0 géométrique,c'est à dire à l'égard d'axes ou de centre des coordonnées,nous désignons par le symbole 1). Ainsi les conditions pour la genèse du calcul géométrique sont préparées.

Prenons maintenant quelques exemples de ce calcul,quelques theorèmes que nous pouvons lire directement sur le diagramme. P. ex. nous y voyons que la droite joignant le point a + b et point a + b c'est la droite a,c'est à dire (a + b)(a + b ) = a. Pareillement nous constatons que (a + b)(a + b ) = a . Nous savons déjà que aa'= 0 ou bien que 0 = (a + b)(a + b')(a'+ b)(a'+ b'),autrement dit que 0 se développe en pro-

---

[1] Nous remarquons ici que ce diagramme ne se rapporte qu'au cas ou a $\nless$ a', a' $\nless$ a, b $\nless$ b', b' $\nless$ b et a $\nless$ b, a $\nless$ b', b $\nless$ a, b' $\nless$ a. (Le symbole < signifie que la droite passe par le point). Les modifications de ce diagramme que nous obtenons en tournant les droites coordonnées de 90° ou de 45° seront conformes aux relations éliminées ci-dessus. Cette géométrie catégorielle peut être aussi facilement representée dans trois dimensions où à la place des carrés duels nous avons le cube et l'octoèdre duel à l'égard de lui.

duit de 4 sommets du carré extérieur. Ces exemples suffiront complètement pour nous orienter sur la nature propre de ce calcul des points et des droites; dans ces formules nous rencontrons celles que nous connaissons bien, les formules d'algèbre de la logique: principe de dichotomie, définition de 0 (a + 0 = a), développement de 0 par rapport à a et b etc. Ce parallélisme exact entre les relations d'algèbre de la logique et celles de la géométrie catégorielle, que nous voyons directement sur notre diagramme, peut être constaté systématiquement, partant d'axiomes[1] et passant aux théorèmes.

Cet ensemble de la géométrie catégorielle avec sa "caracteristique", c'est à dire avec l'algèbre de la logique, nous donne ce que nous nommons la géométrie catégorielle algébrique ou plus strictement: la géométrie catégorielle logico-algébrique. Nous y avons un pendant exact à l'égard de la géométrie analytique de Descartes avec cette différence que la géométrie analytique est géométrie quantitative, tandis que la géométrie ci-dessus est une géométrie qualitative et catégorielle et son algèbre est aussi une algèbre qualitative.

1948 r.

---

[1] L'axiomatique de la géométrie catégorielle peut suivre pas à pas celle d'algèbre de la logique.